CALCOLO NUMERICO

5/03/2014

prof. Luca Gemignani

Dip. di Informatica (Fibonacci)

l.gemignani@di.unipi.it

e-learning 2013-2014 pagina web del corso

Iscriversi alla mailing list + nome, cognome, posta elettronica

+

dispensa di calcolo numerico

Libro: "Calcolo Scientifico"

Esame: PROVA SCRITTA + ORALE → aumento massimo di 6 punti e può diventare

↓ implementazione + teoria

↓ voto minimo 12

↓ domande di natura teorica (Dimostrazioni)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Ricevimento: venerdì mattina 10.30 - 12.30

Calcolo numerico → risoluzione numerica di problemi matematici mediante l'uso di un calcolatore

↓

mediante l'uso di numeri

Esempio 1

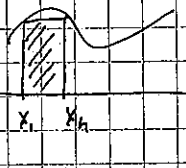
Problema del calcolo dell'integrale definito di una funzione:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ dati iniziali: funzione + estremi di integrazione

Risolvere numericamente: l'unico modo che possiamo manipolare sono i valori della funzione su un certo insieme di punti.

L'integrale è approssimabile con una sommatoria.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,h$$



base x altezza = AREA del RETTANGOLO

è una approssimazione e NON un'uguaglianza

Scrivere la formula come ALGORITMO

ALGORITMO: ↳ sequenza di istruzioni semplici

1) Calcolare h
2) Calcolare i valori $f(x_1) \dots f(x_n)$
3) $S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot h$

Bisogna poi trasformare l'algoritmo in un linguaggio di programmazione
Il calcolatore farà degli errori nel calcolo.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Es.
Supponiamo di voler calcolare $\int$ di $\sin x$.
Quali sono le operazioni che il calcolatore sa fare?
Il limite del calcolatore è che ha memoria finita. Le uniche op. che le compiere sono quelle aritmetiche. Così non ci dà il valore del seno ma una approssimazione del valore.
Si va a creare un errore piccolissimo che continuando a fare i calcoli potrebbe ampliarsi.

↓

è importante capire quanto sono grandi questi errori.

Punto di partenza: Capire come funziona l'aritmetica di macchina
Problematiche relative all'aritmetica di macchina e generazione degli errori

Numeri Reali { numeri razionali = si rappresenta sotto forma di frazione e può avere un numero infinito di cifre
numeri irrazionali = sequenza infinita di cifre non rappresentabile come frazione

Numeri → rappresentati con $\neq$ basi

Base di rappresentazione = B elemento $\in \mathbb{N}$, maggiore o uguale di 2
$B \in \mathbb{N}$, $B \geq 2$

Si può dire che $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, $\exists!$ e sono unici (univocamente determinati) un intero relativo $p \in \mathbb{Z}$ e una sequenza infinita di cifre $\{d_i\}_{i=1}^{+\infty}$, $d_1 \neq 0$, d_i non definitivamente uguale a $B-1$, $0 \leq d_i \leq B-1$, tale che $x = \text{sign}(x) \cdot B^p \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} d_i B^{-i}$ Teorema della base di rappresentazione

Vogliamo rappresentare un numero x in base 2

x si può rappresentare come segno di x cioè ± 1

p = esponente della rappresentazione

d_i = cifre della rappresentazione

Questo è il caso generale con una sequenza $\mathcal{R}$ di cifre

$\boxed{d_1 \neq 0}$ affinché la rappresentazione sia unica] Rappresentazione normalizzata

Ad es. 0.1 posso vederlo come $10^0 \cdot 0{,}1$ o ancora come $10^1 \cdot 0{,}01$

di non definitivamente $= B-1$]

↓

utile per garantire l'unicità

$0.\bar{9} \overset{?}{=} 1$ $\quad \boxed{0{,}\bar{9} = 1}$ È uno dei numeri

$$0{,}\bar{9} = 0{,}999\ldots = \sum_{i=1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 9 \sum_{i=1}^{+\infty} 10^{-i} = \frac{9}{10} \sum_{i=}^{+\infty}$$

Voglio sapere quanto fa tale somma:

$1 + a + a^2 + \ldots + a^k = S_k$

$1 + a + a^2 + \ldots + a^k + a^{k+1} = S_{k+1}$ } che relazione c'è?

(1) $S_{k+1} = S_k + a^{k+1}$ (2) $S_{k+1} = 1 + a S_k$ eguagliando le relazioni ottengo:

$S_k + a^{k+1} = 1 + a S_k \Rightarrow S_k (1-a) = 1 - a^{k+1}$ e ottengo che

$$\boxed{S_k = \frac{1 - a^{k+1}}{1-a}}$$

Nel mio caso $S_k = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{10}}$, il limite di S_k per $k \to +\infty$?

$S_k \xrightarrow{k \to +\infty} \dfrac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{10}{9} \Rightarrow \left(\dfrac{9}{10}\right) \cdot \dfrac{10}{9} = 1 = 0{,}\bar{9}$ c.v.d.

↑ ciò che starà fuori dalla nostra sommatoria

Qual è la giusta rappresentazione di 1?

$10^0 \cdot 0{,}\bar{9}$ V $10^1 \cdot 0{,}1$?

↑ NO ↑ OK

SERIE GEOMETRICHE

$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i$ è una serie geometrica

$\sum_{i=0}^{n} a^n$ con $a \in [-1, 1]$

↓ converge a $\frac{1}{1-a}$

se $a \geq 1 \Rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$

se $a \leq -1 \Rightarrow$ la serie è indeterminata

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

Vogliamo rappresentare un numero x in base 2

x si può rappresentare come segno di x cioè ± 1

p = esponente della rappresentazione

d_i = cifre della rappresentazione

Questo è il caso generale con una sequenza di cifre

$\boxed{d_1 \neq 0}$ affinché la rappresentazione sia unica] Rappresentazione normalizzata

Ad es. 0.1 posso vederlo come $10^0 \cdot 0{,}1$ o ancora come $10^1 \cdot 0{,}01$

di non definitivamente = B-1]

↓

utile per garantire l'unicità

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 333 9337745

$0.\bar{9} \gtrless 1$? $\boxed{0{,}\bar{9} = 1}$ Sono due rappresentazioni dello stesso numero

$0{,}\bar{9} = 0{,}999\ldots = \sum_{i=1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 9 \sum_{i=1}^{+\infty} 10^{-i} = \frac{9}{10} \sum_{i=1}^{+\infty} 10^{-i} = \frac{9}{10} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i$

serie infinita, il valore è il limite delle somme finite

Voglio sapere quanto fa tale somma:

$1 + a + a^2 + \ldots + a^k = S_k$

$1 + a + a^2 + \ldots + a^k + a^{k+1} = S_{k+1}$ } che relazione c'è?

(1) $S_{k+1} = S_k + a^{k+1}$ (2) $S_{k+1} = 1 + a S_k$ eguagliando le relazioni ottengo:

$S_k + a^{k+1} = 1 + a S_k \Rightarrow S_k (1 - a) = 1 - a^{k+1}$ e ottengo che

$\boxed{S_k = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a}}$

Nel mio caso $S_k = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{10}}$, il limite di S_k per $k \to +\infty$?

$S_k \xrightarrow{k \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right) \cdot \frac{10}{9} = 1 = 0{,}\bar{9}$ c.v.d

ciò che stava fuori dalla nostra sommatoria

Qual è la giusta rappresentazione di 1?

$10^0 \cdot 0{,}\bar{9}$ V $10^1 \cdot 0{,}1$?

↑ no ↑ OK